1. 行列式提公因子的时候 $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{vmatrix} \Rightarrow x\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

2. 对于形式如 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$ 的行列式，可以把除第一行(列)的所有行(列)全加到第1行(列)，然后再提公因子；也可以第1列分别减后面几列.

(行、列相加都相同)

3. 对于爪形行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix}$ $(a_i \neq 0,\ i=2,3\cdots n)$ 这种形式的，通常对第二行(列)及以下的行(列)分别乘 $-\frac{1}{a_i}$ 加到第1行(列)中，(取1，构造下(上)三角矩阵)

4. 对于元素排列存在某种规律的行列式，为展开后不破坏规律性，一般通过第一行和列展开，也可以从最后一行和列展开.

第1列和最后一行.

5. 对于矩阵分块的式子，可将式子分成两个矩阵相乘

$$B-A=(-\alpha_2+2\alpha_3,\ 2\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -5 & -2\end{pmatrix}.$$

6. 线性表示对系数无要求

行列式：针对方阵是否可逆的运算工具

一. 定义.

1. 排列：自然数按某种规律排成一排.

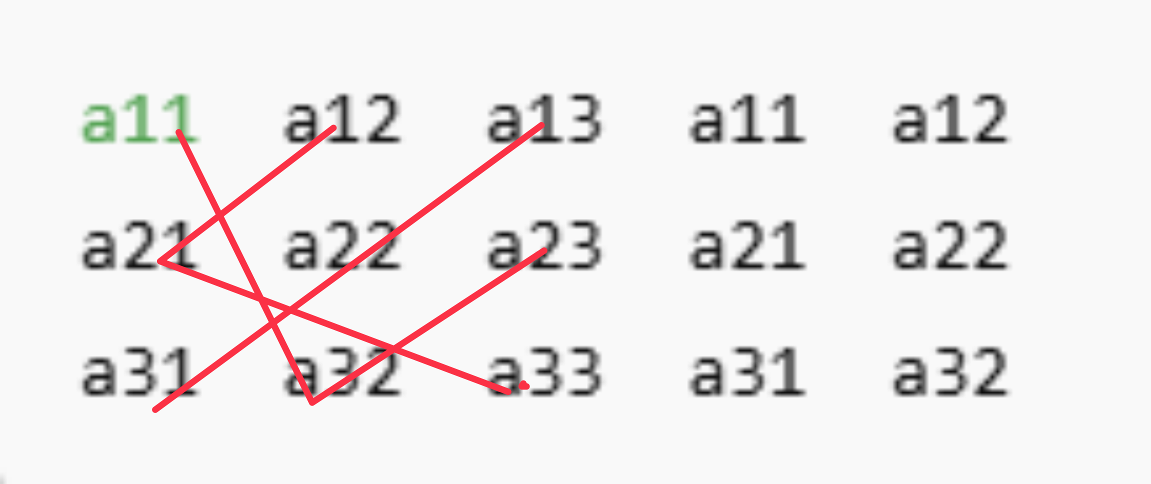
标准排列：按从小到大的顺序.

逆序：两个数(不一定连续)按照非标准排列为一个逆序.

奇排列：逆序数为奇

偶排列：逆序数为偶.

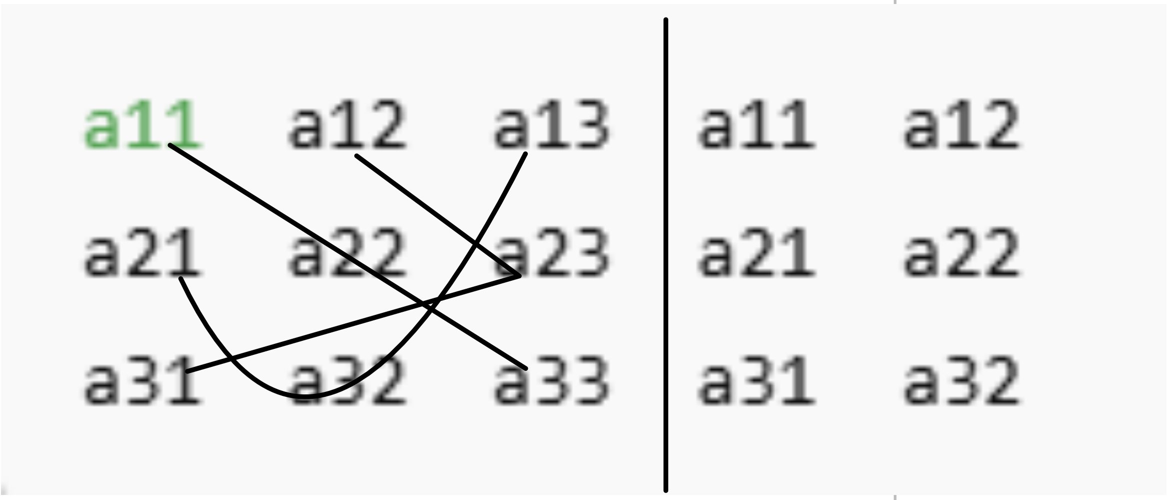
2. 行列式：略.



①. 只有方阵才有行列式.

四、行列式一定是个常数.

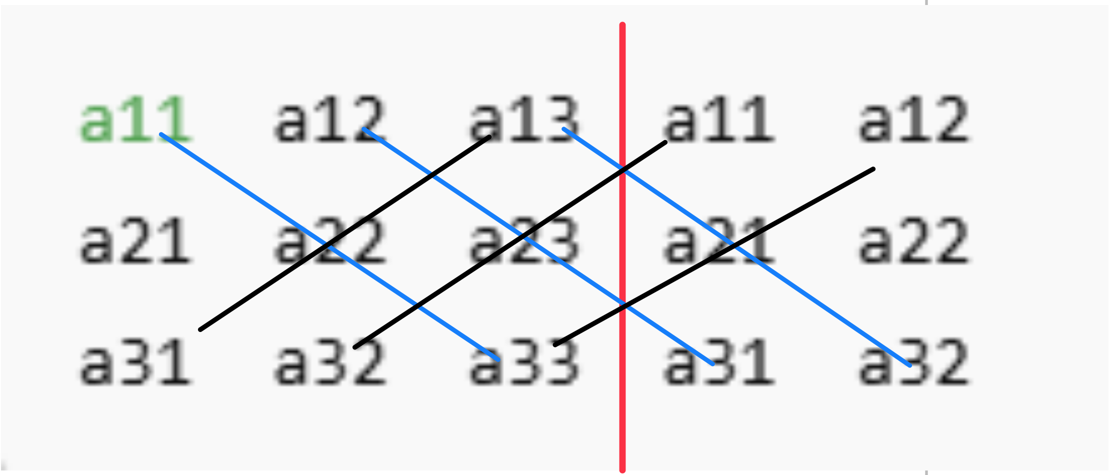
二. 行列式的计算.



1. 常见行列式:

(1). $|a| = a$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$



(3). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

(4). 对角矩阵. 上/下三角矩阵的行列式为对角线元素相乘.

(5). 副对角, 副上/下三角 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 对角元素相乘.

2> 该结论由结论(4)通过 从最后一行/列 与上一行交换得到的. 最后一行 $(-1)^{n-1}$ 倒数第二行 $(-1)^{n-2}$ …… $(-1)^1$

2. 常见的性质

(1). $|A^T| = |A|$

(2). 交换行列式的两行或者两列. 行列式结果互为相反数.

推: 如果行列式中某两行(列)相等, 则行列式一定为0.

列分块 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|$ 假设 $\alpha_2=\alpha_3$, 则 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| = -|\alpha_1, \alpha_3\ \alpha_2|$.

故为0.

(3). 某行或某列有公因子 k. 则可以提出.

a. $|kA_{n\times n}| = k^n|A_{n\times n}|$ k可以为0 ⊇.

b. 某一行或者某一列全为0，则行列式为0.

c. 如果某两行对应成比例，则行列式为0.

$$|\alpha_1\ \alpha_2\ k\alpha_2| = k|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_2| = 0.$$

(4). 把方阵A的某行(列)的k倍加到另一行(列)得到矩阵B，则 $|B|=|A|$

(5). 若方阵的某行(列)均是每个元素之和，则可拆分成两个行列式.

并没有要求 β_1、β_2 中每个元素相等.

$$|\alpha_1, \beta_1+\beta_2, \alpha_3| = |\alpha_1, \beta_1, \alpha_3| + |\alpha_1, \beta_2, \alpha_3|$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1+\beta_2 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_2 \\ \alpha_2 \end{vmatrix}$$

(6). 若A.B是同阶方阵, 则 $|AB| = |A||B|$

$$|A_{3\times2}\ B_{2\times3}| = |C_{3\times3}|$$

$|A_{3\times2}|$ 保方阵.

$$|A_{n\times1} \cdot B_{1\times n}| = |k \cdot B_{n\times m}| = k^n |B_{n\times n}|$$

$$\neq k|B_n|$$

(7). 若方阵A可逆, 那么 $|A| \neq 0$ 且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. (互为倒数).

$$|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$$

$$= |A| \cdot |A^{-1}|$$

故 $|A| \neq 0$, 且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

三. 拉普拉斯公式 (Laplace) (分块矩阵下如何求行列式)

$$\begin{vmatrix} A_{m\times m} & O \\ O & B_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{m\times m} & O \\ C & B_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{m\times m} & C \\ O & B_{n\times n} \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A_{m\times n} \\ B_{n\times n} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & C \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B|$$

证明: B的第一行移到最上第一行. m行.

二行 … 二行 m } n次 m×n

$\vdots$
m

四：范德蒙行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{|A^T| = |A|}$$

$$= (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2})\cdots(a_n - a_1)$$
$$(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_{n-3})\cdots(a_{n-1} - a_1)$$

$(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n-1}-a_{n-3}) \quad (a_{n-1}-a_1)$

$\cdots$

(a_2-a_1)

五. 行列式展开定理

1. 余子式：元素 a_{ij} 去掉第 i 行和第 j 列得到

阶数降数的行列式 (M_{ij})

2. 代数余子式：a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

3. 展开定理：

行列式均可以写成任意一行(列)，每个元素与对应的代数余子式相乘的和的形式.

只要选择0元素较多的行(列)为展开对象

只要选择 [illegible] 恰当就能使 [illegible] 部分 [illegible]，才 [illegible]。

也可通过变换得到。

(补) 行列式性质.

(1).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$$

$$b_1A_{21} + b_2A_{22} + b_3A_{23} + b_4A_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

(2). 若 b_1、b_2、b_3、b_4 是矩阵的某一行或列的元素

则行列式 $=0$.

存在伴随 但矩阵不一定可逆.

六：方阵的伴随矩阵（也是n阶方阵）.

1.定义：

设方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则称方阵 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 为 A 的伴随矩阵

常数.

（其中 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式）

即：把所有的a换掉，然后替换成A，再做转置.

2.重要结论：

对任意n阶方阵，都有其伴随矩阵 A^*. 且 $AA^*=A^*A=|A|E$.

方阵.

$$AA^*=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$

3. 方阵可逆的充要条件:

方阵 $A_{n\times n}$ 可逆 $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$

当 $|A|\neq 0$ 时. $AA^*=|A|E \Longrightarrow A\frac{A^*}{|A|}=E$. 此时. $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

4、伴随的常用公式:

(1). 当 $|A| \neq 0$ 时. $A^* = |A| A^{-1}$; $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{A}{|A|}$.

(2). $(A^*)^T = (A^T)^*$ $\quad$ $(kA)^* = k^{n-1} A^*$

$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ $\quad$ $(AB)^* = B^* A^*$ $\quad$ $\underline{\underline{|A^*| = |A|^{n-1}}}$.

七.矩阵的秩(针对任意矩阵,不光是方阵)

1. k阶子式:矩阵 $A_{m\times n}$ 任取 k行与k列,交叉点上的 k^2 个元素按照原序列排成的k阶行列式.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \quad 2阶 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots$$

不唯一

注:若A为方阵,则其行列式$|A|$中的一个余子式M_{ij}都为A的一个$n-1$阶子式.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix}$$

2. 秩：如果矩阵 $A_{m\times n}$ 中至少存在一个不等于0的k阶子式，且所有高于k阶的子式全部等于0，数k为矩阵的秩．记 $R(A)=k$ 或 $r(A)=k$

若 $R(A)=2$，则 $\begin{cases} ①.\ 2\text{阶子式中至少一个不为}0. \\ ②.\ 3.4\cdots\text{阶子式全为}0. \end{cases}$

注：(1) 行梯阶形矩阵的秩等于其非零行数．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为2．当为3和4阶子式时，必定会出现0行元素，根据行列式性质，行列式为0．

(2). $0\leq R_{m\times n}\leq \min(m,n)$

规定零矩阵的秩为0（有且仅有）

(3). 对于方阵 A，∴ $R(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

$\Updownarrow$

n阶子式不为0，即：$|A|\neq 0$.

$R(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$ 不可逆.

3. 求秩的方法.

(1). 定理：初等变换不会改变矩阵的秩.

↳ 两矩阵等价：$A\cong B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$，且 A、B 同型.

(2). 前提：任意类型的矩阵都可通过初等变化得到行阶梯矩阵.

方法：转变成行阶梯矩阵

C注：求矩阵的秩：行列变换可同时进行.

求矩阵的逆：行、列只能使用一种.

4. 结论：

(1). $R(A+B) \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$.

两个矩阵和的秩 ≤ 增广矩阵的秩 ≤ 秩的和.

(2). $R(AB) \le \begin{cases} R(A) \\ R(B) \end{cases}$ 矩阵的秩越乘越小.

(3). 矩阵乘一个可逆矩阵，不会改变该矩阵的秩.

可以看作单位阵经过初等变换得到的 $A \cdot A = E$.

(4). 当且仅当 $R(A_{m\times n}) = n$ 时, $R(\underset{m\times n}{\underline{A}}B) = R(B)$.

当且仅当 $R(B_{n\times s}) = n$ 时, $R(A\overset{n\times s}{\underline{B}}) = R(A)$

即: 左乘列满秩矩阵 / 右乘行满秩矩阵 $\rightarrow$ 秩不变.

(5). $R(A^T) = R(A) = R(A^TA) = R(AA^T)$.

(6). $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le R(A) + R(B)$, 一般情况下 $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \ne R(A, B)$

(7). $R(A)+R(B)-n \le R(AB)$. n为A的列数.

$$\boxed{A_{m\times n}B_{n\times s}=O_{m\times s}\text{，则 } R(A)+R(B)\le n.}$$

(8). $$R(A^*_{n\times n})=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$